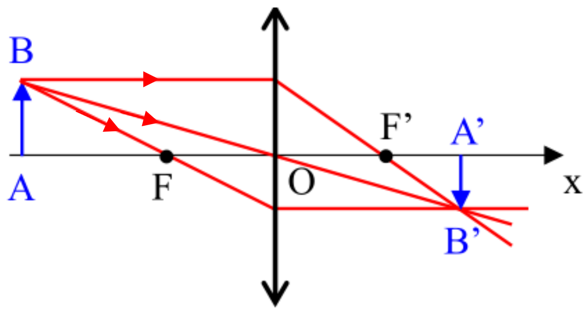
I - Une brève histoire de la photographie

I.1 - Objet et image

1) Pour être dans les conditions de Gauss, il faut utiliser des rayons lumineux **peu éloignés de l'axe optique** et **peu inclinés par rapport à ce dernier**. Une lentille mince utilisée par les conditions de Gauss peut être considérée comme rigoureusement stigmatique et aplanétique. Dans l'appareil photo, c'est le **diaphragme** qui permet d'assurer que les conditions de Gauss sont remplies.

2)



3) Relation de grandissement de Newton :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}}$$

4) D'après les relations précédentes :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{\overline{FA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \overline{AB} \times \frac{\overline{FO}}{\overline{FO} + \overline{OA}} = \boxed{\frac{hf'}{f' - L}}$$

Dans le cas où $f' \ll L$, on a :

$$\boxed{\overline{A'B'} \simeq -\frac{hf'}{L} = -12{,}5\ \mathrm{mm}}$$

5) Relation de conjugaison de Descartes :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

6) On a :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f'}$$

Lorsque $L \to \infty$, on a $\boxed{d = f'}$.

7) Lorsque L diminue, d augmente. De plus, lorsque $L \to f'$, $d \to +\infty$. Puisque d ne peut pas dépasser une valeur maximale d_{max}, on en déduit qu'il existe bien une valeur minimale de L.

Cette valeur vaut :

$$\frac{1}{d_{max}} + \frac{1}{L_{min}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{min} = \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{d_{max}}\right)^{-1} = \frac{d_{max}\, f'}{d_{max} - f'} = 55\ \mathrm{cm}}$$

I.2 - Influence de la focale

8) On a toujours $L \gg f'$. Ainsi,

$$\boxed{\overline{A'B'} \simeq -\frac{hf_1'}{L} = -25\text{ mm}}$$

On constate que l'image de l'arbre est plus grande que la dimension la plus petite du capteur (24 mm) ; on peut voir l'arbre en entier sur la photo uniquement en mode « portrait ».

9) L'image obtenue avec un téléobjectif de focale $f_1' = 2f'$ fait la même taille que celle obtenue avec f' pour une distance $L_1 = L/2$, tant que l'approximation $L \gg f'$ reste valable. En, effet,

$$\overline{A'B'} \simeq -\frac{hf_1'}{L_1} = -\frac{hf'}{L}$$

C'est en ce sens qu'on peut dire incorrectement qu'un téléobjectif rapproche les objets.

I.3 - Téléobjectif à deux lentilles

10) Relation de conjugaison de Descartes pour L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \times f_1'}{\overline{O_1A} + f_1'}$$

Toujours avec l'approximation $|\overline{O_1A}| \gg f_1'$, on obtient : $\boxed{\overline{O_1A_1} \simeq f_1'}$

Ainsi, $\boxed{\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} \simeq f_1' - e}$

11) On souhaite une image réelle. Par définition, il faut : $\boxed{\overline{O_2A'} > 0}$. Relation de conjugaison de Descartes pour L_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad \overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1} \times f_2'}{\overline{O_2A_1} + f_2'} > 0$$

Or, $f_2' < 0$ puisqu'il s'agit d'une lentille divergente.

Il faut donc :

$$\left\{\begin{array}{lllll} & \overline{O_2A_1} > 0 & \text{et} & \overline{O_2A_1} + f_2' < 0 \\ \text{ou} & & & \\ & \overline{O_2A_1} < 0 & \text{et} & \overline{O_2A_1} + f_2' > 0 \end{array}\right.$$

La deuxième condition est impossible à satisfaire puisque $f_2' < 0$, elle implique donc que $\overline{O_2A_1} < 0$ et $\overline{O_2A_1} > 0$. Impossible !

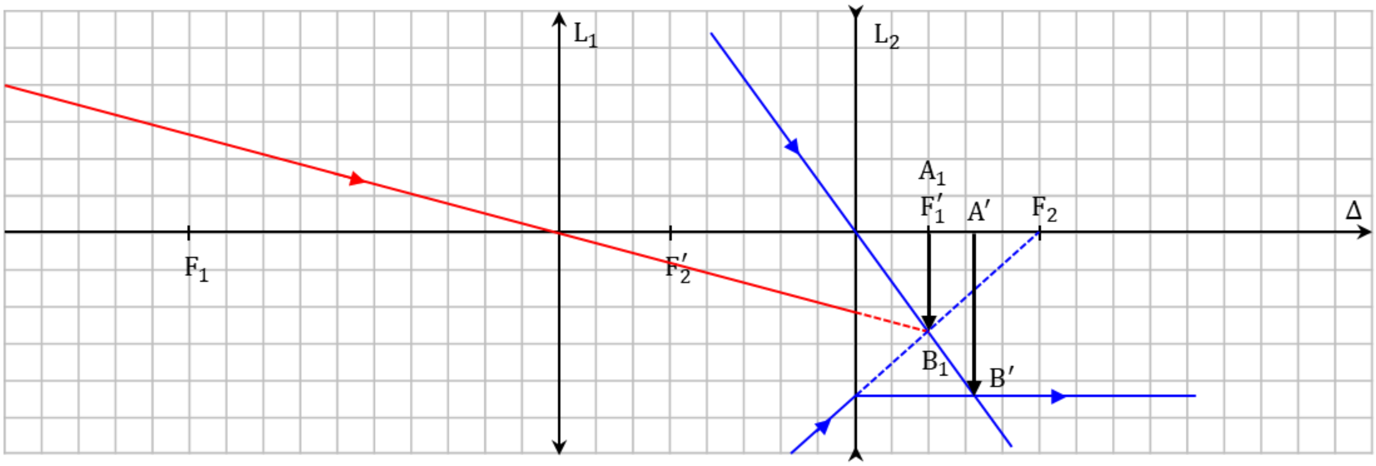
De la première condition, on en déduit :

$$0 < \overline{O_2A_1} < -f_2' \quad \Rightarrow \quad 0 < f_1' - e < -f_2' \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1' > e > f_1' + f_2'}$$

On a bien :

$$\boxed{f_1' = 10\text{ cm} > e = 8\text{ cm} > f_1' + f_2' = 5\text{ cm}}$$

12)



13) L'utilisation d'une lentille divergente permet, pour une image de taille donnée, de réduire l'encombrement (distance entre la première lentille et le capteur). En effet, on peut voir sur le schéma précédent que pour obtenir une image de la taille de $A'B'$ avec le rayon rouge uniquement, le capteur aurait dû être placé bien plus loin.

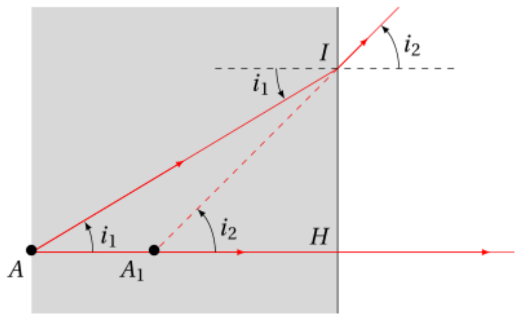
-- Fin de la partie I --

II - Capture d'empreintes digitales par réflexion totale

II.1 - Conception du système optique

14) Exemple traité en cours (O2). On a :

$$\tan(i_1) = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA}} \qquad \tan(i_2) = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA_1}} \qquad n\sin(i_1) = \sin(i_2)$$



Dans les conditions de Gauss, on a bien :

$$\boxed{\overline{HA_1} = \overline{HA} \cdot \frac{i_1}{i_2} = \frac{\overline{HA}}{n}}$$

15) Par définition : $\gamma = \frac{p'}{p}$ et $D_1 = \overline{AA_1'} = \overline{AO} + \overline{OA_1'} = p' - p$. Ainsi :

$$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{p' = \frac{\gamma\, D_1}{\gamma - 1}}$$

Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma\, D_1} - \frac{\gamma - 1}{D_1}\right)^{-1} = \frac{\gamma\, D_1}{-\gamma^2 + 2\gamma - 1} = \boxed{-\frac{\gamma\, D_1}{(\gamma - 1)^2}}$$

16) Comme nous l'incite l'énoncé, posons la fonction : $g(\gamma) = \frac{D_1}{f'} = -\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$

Calculons la dérivée : $g'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$

Déterminons le tableau de variation de cette fonction sur $]-\infty,\ 0[$.

γ	$-\infty$		-1		0^-
$g'(\gamma)$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(\gamma)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

La fonction admet un minium en $\gamma = -1$. On en déduit : $g(\gamma) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_1 \geq 4f'}$

17) Trouvons dans un premier temps la valeur de D_1.

$$D_1 = \overline{A_1A_1'} = \overline{A_1H} + \overline{HA} + \overline{AA_1'} = L\left(\frac{1}{n} - 1\right) + D = 9{,}0 \text{ cm}$$

On suppose $\gamma = -2$. La distance focale de la lentille vaut :

$$\boxed{f' = \frac{D_1}{g(-2)} = 2{,}0 \text{ cm}}$$

Cherchons la distance lentille-écran $p' = \overline{OA_1'}$.

$$\gamma = -2 = \frac{p'}{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p' = -2p = -2\frac{D_1}{\gamma - 1} = 6{,}0 \text{ cm}}$$

18) On a (avec $|\gamma| = -\gamma$) :

$$g(\gamma) = \frac{D_1}{f'} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad dg = -D_1 \frac{df'}{f'^2} = \left(-1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma \quad \Rightarrow \quad d|\gamma| = \frac{D_1}{\underbrace{f'^2\left(\frac{1}{|\gamma|^2} - 1\right)}_{<0}} df'$$

On veut qu'une variation de f' fasse augmenter $|\gamma|$, ie. que $d|\gamma| > 0$. Il faut donc $\boxed{df' < 0}$, c'est-à-dire diminuer f'. Or, en diminuant f', on augmente la courbure des dioptres. On peut alors quitter l'hypothèse lentille mince. De plus, on approche la lentille de l'objet. La distance objet-lentille n'est plus négligeable devant la taille de l'objet : son diamètre apparent devient grand, on quitte les conditions de Gauss.

Enfin, $|p|$ diminue avec f' mais est limité par l'épaisseur du verre du prisme : $|p| > D - D_1$.

II.2 - Réflexion totale

19) Cf. cours : 3 lois à énoncer (rayons coplanaires, angle de réflexion, angle de réfraction).

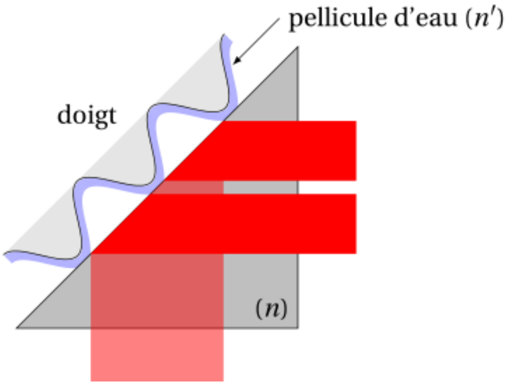
20) Réflexion totale : il n'existe pas de rayon réfracté. Il faut $n_1 > n_2$ et $i > i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

21) On remarque que les conditions sont vérifiées : $n = 1{,}5 > 1$ et $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 42\,° < i = 45\,°$

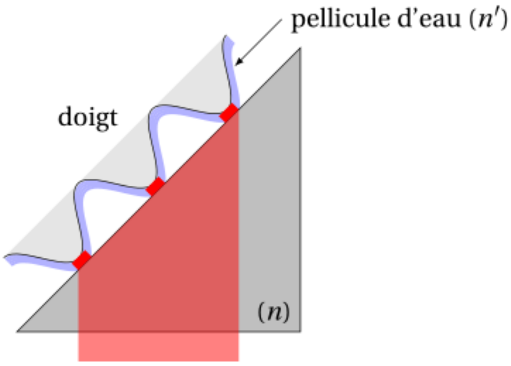
Il y a donc toujours réflexion totale : le laser n'éclaire donc pas l'empreinte.

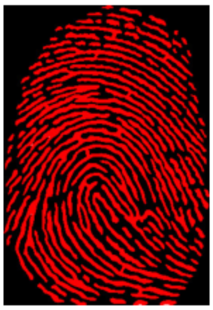
22) L'angle limite au niveau de la pellicule d'eau (de la crête donc) vaut alors $i'_{lim} = \arcsin\left(\frac{1{,}3}{1{,}5}\right) = 60\,° > i = 45\,°$. Il y a réfraction.

Interprétation 1 (cas où la lumière du laser frappe le capteur sans lentille intermédiaire) : là où il y une crête, la lumière du laser est réfractée, elle n'arrive qu'en petite quantité au niveau du capteur. Au contraire, au niveau des creux, la lumière est réfléchie totalement et atteint massivement le capteur : l'empreinte apparaît en négatif.



Interprétation 2 (cas où on place la lentille pour imager le dioptre) : là où il y une crête, la lumière du laser est réfractée et éclaire la crête. Au contraire, au niveau des creux, la lumière est réfléchie et n'éclaire pas le creux. Seules les crêtes sont alors des sources de lumière. L'empreinte apparaît en positif.





-- Fin de la partie II --